

Das Dach des Centre Pompidou (Metz)

von Julie Valerius, Nikolaus-von-Kues-Gymnasium, Bernkastel-Kues

Computergestütztes Design gewinnt in Industrie und Alltag immer mehr an Bedeutung, so z.B. in der Automobilindustrie oder in der Architektur. Splines, also Funktionen, die basierend auf (wenigen) Stützstellen stückweise aus Polynomen zusammengesetzt werden, sind dabei ein grundlegendes Verfahren. Im Sinne eines lebensweltbezogenen Mathematikunterrichts bietet es sich an, Schülern ein Grundverständnis für die Arbeitsweise solcher Programme zu vermitteln.

In der Schule können Splines vertiefend im Anschluss an die sogenannten „Steckbriefaufgaben“ behandelt werden. Allerdings ist Spline-Interpolation ohne digitale Berechnungen und Darstellungsunterstützung nur unter hohem Aufwand leistbar, wenig anschaulich - aber motivierend.

Auch mit Grafikrechner- Unterstützung erscheint es sinnvoll, sich auf kubische Splines (Polynome 3. Grades) zu beschränken. Diese sind zum Grundverständnis völlig ausreichend und bieten eine vernünftige Relation zwischen Rechenaufwand und Lernertrag.

Im vorliegenden Artikel wird die Verwendung des Bildplot-Add-Ins des FX-CG20 erläutert. Dieses erlaubt es, eigene Fotos einzulesen, Stützpunkte auszuwählen, diese in einer Liste zu bearbeiten und die berechneten Interpolationspolynome im Vergleich mit dem Realbild darzustellen. Zur Reduktion des sonst erheblichen Rechenaufwandes wird auf Matrizen (Run-Matrix-Menü) zurückgegriffen.

Die Idee zum vorliegenden Artikel entstand bei der Besichtigung des Centre Pompidou in Metz, dessen geschwungene Dachform zur Interpolation durch Splines geradezu einlädt.

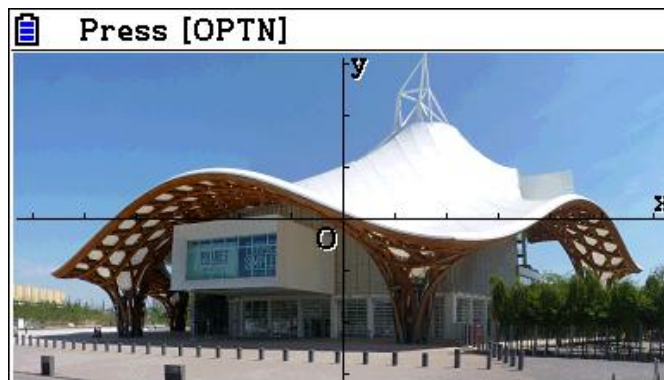
Mit Hilfe des Programms „Picture Conversion Engine“ (welches Lehrer bei Interesse über education@casio.de anfordern können) können Bild- und Moviedateien am Computer bearbeitet und in ein Dateiformat (g3p, g3b) konvertiert werden, das auf dem Casio FX-CG20 verwendbar ist.

Zu Beginn öffnet man im Hauptmenü das Bildplot-Add-In und wählt das gewünschte Bild aus:

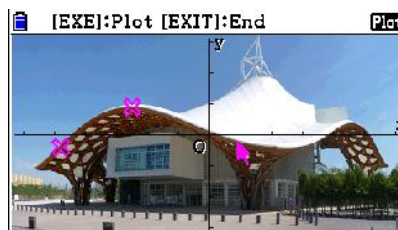


So erscheint das Centre Pompidou auf dem Bildschirm:

Foto: Tobias Selinger



[OPTN] [F2] [Plot] erlaubt es, Punkte zu setzen (bestätigen jeweils mit [EXE])



Die Korrektur der gesetzten Punkte ist möglich durch

[OPTN] [F6] [F3] [EDIT] Punkt mittels Cursortasten anwählen [EXE]
Verschieben des Punktes mittels Cursortasten [EXE]

[F3] [List] zeigt die Koordinaten der ausgewählten Punkte:

	X	Y	T
1	-5	-0.5	0
2	-1.6	0.7	1
3	2.4	-0.4	2
4	4.6	0.4	3

- 5

AXTRNS EDIT DEL-BTM DEL-ALL SET >

Jetzt beginnt erst einmal die Handarbeit:

Die ausgewählten Stützpunkte müssen in Bedingungen übersetzt werden, die der Forderung der Interpolation der Dachform mit Hilfe stückweise definierter Polynome dritten Grades, die „glatt“ ineinander übergehen, gerecht werden:

- „direkter“ (stetiger) Anschluss: $f_i(x_i) = y_i$ und $f_{i+1}(x_i) = y_i$
- knickfrei: $f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'(x_{i+1})$ bzw. $f_i'(x_{i+1}) - f_{i+1}'(x_{i+1}) = 0$
- ruckfrei: $f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1})$ bzw. $f_i''(x_{i+1}) - f_{i+1}''(x_{i+1}) = 0$

Zusätzlich müssen zwei Randbedingungen gestellt werden, die jedoch je nach Problemstellung angepasst werden können:

- (i.d.R.) geradlinige Fortsetzbarkeit: $f_1''(x_1) = 0$ und $f_n''(x_n) = 0$

Anmerkung: Aufgrund der Gleichheit von f' und f'' stimmt nicht nur das Krümmungsverhalten sondern die Krümmung (Radius des Krümmungskreises) selbst überein!

Ausgehend von 5 Stützpunkten ergeben sich 4 Polynome f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mit insgesamt 16 zu berechnenden Parametern, festgelegt durch 16 Bedingungen.

Es empfiehlt sich eine tabellarische Übersicht in Papierform anzulegen, anhand derer die entsprechenden Koeffizienten des LGS anschließend in eine Matrix (Menü 1) übertragen werden können. Sie finden diese Übersicht am Ende dieses Dokuments (gelb: 1. Stützstelle, grün: 2., blau: 3., pink: 4., rot: 5., der geneigte Leser möge aus Platzgründen schlecht lesbare Einträge selbst ergänzen!).

Dieser Tabelle sind die Bestimmungsgleichungen für die 16 Koeffizienten der 4 Spline-Polynome genauer zu entnehmen.

Es beschreiben die Gleichungen

- **1 – 8** die Forderung, dass die Polynome an den Stützpunkten stetig ineinander übergehen,
- **9, 10** die Forderung der linearen Fortsetzbarkeit am Rand, die jedoch nicht zwingend ist und je nach Problemstellung variiert werden kann,
- **11-13** den knickfreien Übergang an den Stützstellen,
- **14 – 16** die Übereinstimmung im Krümmungsverhalten an den Stützstellen.

Beim Ausfüllen der Tabelle ist es nicht notwendig z.B. $(-1,6)^3$ zu berechnen, da die folgende Eingabe in eine Matrix auch per Rechenoperationen möglich ist.

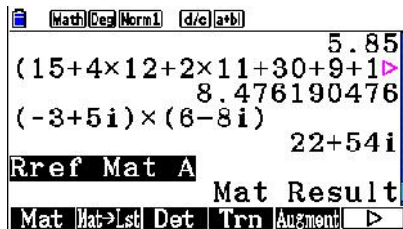
Zur Berechnung der Koeffizienten wird die Matrixoperationen im Run-Matrix-Menü eingesetzt:

[F3] [MAT/VCT] **[F3]** [DIM] m: 16 (Zeilenzahl), n: 17 (Spaltenzahl) **[EXE]** Eingabe (nach **[EXE]** springt der Cursor immer um eins nach rechts bzw. wieder an den Anfang der nächsten Zeile)

	1	2	3	4
1	-125	25	5	1
2	0	2.56	1.8	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
(-1.6)	^3			

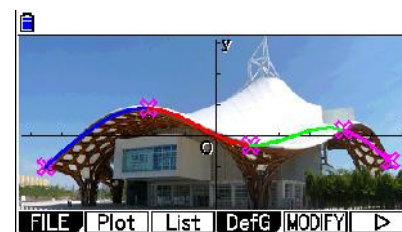
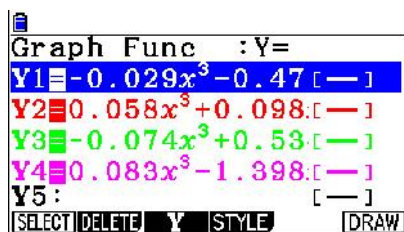
Nach der letzten Eingabe : 2 x **[EXIT]** normaler Taschenrechner-Bildschirm

Der Befehl „Rref Mat [Name]“ liefert die gesuchten Koeffizienten der Interpolationspolynome, die allerdings von Hand zur Eingabe im Bildplot-Menü übertragen werden müssen.



	14	15	16	17
Ans				
1	0	0	0	-0.029
2	0	0	0	-0.472
3	0	0	0	0.058
4	0	0	0	0.098
5	0	0	0	-0.074
				-0.029

Zurück im Bildplot-Menü können die stückweise definierten Polynome f_1 bis f_4 über **OPTN** **F4** [DefG] eingegeben und anschließend dargestellt werden:



Die nicht ganz optimale Interpolation vor allem im rechten Bereich liefert Anlass zu Diskussionen und Weiterführungen:

- Sollten mehr oder andere Stützpunkte gewählt werden?
- Beeinflusst die Wahl der Stützpunkte die Güte der Approximation?
- Ist das nicht klar, da es sich um eine räumliche Darstellung handelt?
- Wie können räumliche Objekte interpoliert werden?

Insgesamt bietet das Bildplot-Add-In auch außerhalb der Splineinterpolation die Möglichkeit, im Alltag die „mathematische Brille“ aufzusetzen, um den Unterricht durch Realbeispiele zu bereichern. Weitere GTR-Funktionen wie Matrizenrechnung oder Regression erlauben eine Reduktion des Rechenaufwands, wodurch der unterrichtliche Schwerpunkt ganz im Sinne der Kompetenzorientierung verstärkt auf Modellbildung, Interpretieren und Argumentieren gelegt werden kann.